Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228
УДК 519.6

Методы построения инвариантных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$

Ирина Михайловна ФЕДОТОВА, Мария Ивановна МЕДВЕДЕВА, Анастасия Сергеевна КАЦУНОВА
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»
660041, Российская Федерация, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о построении кубатурных формул для поверхности тора T в $\mathbb{R}^3$, инвариантных относительно группы G, порожденной отражениями T в себя. У известных на данный момент инвариантных кубатурных формул, имеющих степень точности больше 3, число узлов существенно превосходит минимально возможное. В статье построены инвариантные кубатурные формулы степени 5 и 7 для поверхности тора с числом узлов, приближенному к минимальному. Приведены таблицы значений узлов и коэффициентов построенных кубатурных формул. Исследована зависимость этих значений от отношения радиусов направляющей и образующей окружностей тора. Для построения использовался метод инвариантных кубатурных формул, основанный на теореме С. Л. Соболева.

Ключевые слова: кубатурные формулы, тор, инвариантные многочлены, группа преобразований тора в себя

Для цитирования: *Федотова И.М., Медведева М.И., Кацунова А.С.* Методы построения инвариантных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 218–228.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228

Methods for constructing invariant cubature formulas for integrals over the surface of a torus in $\mathbb{R}^3$

Irina M. FEDOTOVA, Maria I. MEDVEDEVA, Anastasiya S. KATSUNOVA
Siberian Federal University
79 Svobodny Pr., Krasnoyarsk 660041, Russian Federation

Abstract. The article considers the question of constructing cubature formulas for the surface of a torus T in $\mathbb{R}^3$, invariant under the group G generated by reflections of T into itself. For currently known invariant cubature formulas with a degree of accuracy greater than 3, the number of nodes significantly exceeds the minimum possible. The article proposes invariant cubature formulas of degree 5 and 7 for the surface of a torus with a number of nodes close to the minimum. Tables of values of nodes and coefficients of the constructed cubature formulas are given. The dependence of these values on the ratio of the radii of the guide and generatrix of the torus circles is studied. For construction, the method of invariant cubature formulas is used, based on the theorem of S. L. Sobolev.

Keywords: cubature formulas, torus, invariant polynomials, group of torus to self transformations

Mathematics Subject Classification: 65D32.

For citation: Fedotova I.M., Medvedeva M.I., Katsunova A.S. Methods for constructing invariant cubature formulas for integrals over the surface of a torus in $\mathbb{R}^3$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 218–228. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается вопрос о построении кубатурных формул вида

$$I[f] = \frac{1}{4\pi^2 r} \int\limits_T f(x,y,z)dS \simeq \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i, y_i, z_i) \tag{0.1}$$

для поверхности тора T в $\mathbb{R}^3$, определяемой уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2 z^2 - 4r^2 = 0, \quad r \geq 1, \tag{0.2}$$

инвариантных относительно группы G, порожденной отражениями тора T в себя. Уравнение (0.2), являющееся нормированным уравнением тора

$$\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 - a^2\right)^2 + 4R^2 Z^2 - 4R^2 a^2 = 0,$$

получено с помощью замены переменных $X = ax$, $Y = ay$, $Z = az$, где $r = R/a$.

Для исследования построения кубатурных формул для поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ есть веские причины. Во-первых, эта поверхность имеет различную кривизну в точках с фиксированным значением. Эта кривизна зависит от соотношения радиусов R, a, т. е. от $r = R/a$. В этом заключается главное различие построения кубатурных формул для поверхности тора и для поверхности с постоянной кривизной, например, сферы. Величина коэффициентов и значения координат узлов для тора тоже будет зависеть от соотношения радиусов R, a. Для некоторых соотношений формулы существуют, для некоторых нет. Во-вторых, на данный момент полностью описаны только минимальные кубатурные формулы для тора степени 3, построены отдельные минимальные формулы степени 2, а известные инвариантные формулы степеней больше 3 имеют число узлов гораздо больше минимального.

1. Основные понятия

Приведем некоторые сведения из теории инвариантных кубатурных формул.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным множеством относительно преобразований группы G, если $g(\Omega) = \Omega$ для любого $g \in G$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Формула

$$\int\limits_\Omega p(x) f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^{N} c_j f(x^{(j)}), \quad \Omega \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

называется инвариантной кубатурной формулой относительно G, если область интегрирования Ω и весовая функция $p(x)$ инвариантны относительно G, и совокупность узлов данной формулы представляет собой объединение G-орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты.

Понятие инвариантной кубатурной формулы было введено С. Л. Соболевым [1], им же была доказана приведенная ниже теорема и даны ее применения к построению инвариантных кубатурных формул для сферы.

Мы будем использовать теорему С. Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах в формулировке из [2].

Теорема 1.1. *Для того, чтобы кубатурная формула* (1.1)*, инвариантная относительно преобразований группы* G*, была точна для всех функций конечномерного векторного пространства* Ψ*, инвариантного относительно* G*, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех функций из* Ψ*, которые инвариантны относительно* G.

В работе будут строиться инвариантные кубатурные формулы, имеющие точность d.

Определение 1.3. Говорят, что кубатурная формула (1.1) имеет точность d, если она точно интегрирует (превращается в точное равенство) многочлены из $\mathbb{R}^n$ степени не выше d и существует хотя бы один многочлен степени $d+1$, для которого формула (1.1) не точна.

В качестве группы G мы будем рассматривать группу отображений тора T в себя. Она представима в виде декартового произведения $G = G_1 \times G_2$ группы G_1, порожденной отражением от плоскости xOy, и группой G_2, порожденной группой симметрий плоскости xOy.

Заметим, что полученные в статье формулы не являются минимальными в том смысле, что число узлов не совпадает с нижней границей [3]. Вообще, минимальные формулы для тора известны только для $d=2$ и $d=3$ (см. [4–6]). Однако методы их получения, такие как метод воспроизводящего ядра и метод общих корней ортогональных многочленов, не удается пока использовать при $d>3$. Отметим также, что на построение и существование кубатурных формул (0.1) существенное влияние оказывает значение параметра r (впервые это было отмечено в [4]), так что наличие кубатурной формулы точности d при одном значении r не гарантирует существование таких формул при других r.

В качестве группы G_2 будем рассматривать группу D_2 (группа симметрий прямоугольника) [7]. Она включает в себя: отражения относительно осей, тождественное преобразование и поворот на угол 180°. Используя данную группу, удается уменьшить число узлов и приблизиться к их минимальному количеству.

Построим кубатурные формулы для тора пятой и седьмой степени точности, инвариантные относительно группы $G = G_1 \times D_2$, в этом случае G-орбита точки $M(x,y,z) \in T$ может содержать самое большее 8 точек.

2. Построение инвариантной кубатурной формулы 5-й степени точности

Инвариантными для G многочленами не выше пятой степени являются

$$1,\ x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ z^2,\ x^4+y^4,\ x^4-y^4,\ x^2y^2\ z^4,\ z^2(x^2+y^2),\ z^2(x^2-y^2).$$

Из (0.2) видно, что z^4 линейно выражается через многочлены

$$x^2+y^2,\ z^2,\ x^4+y^4,\ z^2(x^2+y^2),\ x^2y^2$$

и постоянные. Учитывая это, получаем, что базисными инвариантными формами относительно G для T будут многочлены

$$u_1=1,\ u_2=x^2+y^2,\ u_3=x^2-y^2,\ u_3=z^2,\ u_4=x^4+y^4,$$
$$u_5=x^4-y^4,\ u_6=z^2(x^2+y^2),\ u_7=z^2(x^2-y^2),\ u_8=x^2y^2.$$

В уравнение тора (0.2) входит параметр r, поэтому узлы и коэффициенты кубатурной формулы будут зависеть от r. Выберем узлы кубатурной формулы так, чтобы их число N

было наименьшим возможным. Это число N определяется разрешимостью системы

$$I[u_j] = \sum_{i=1}^{N} c_i\, u_j(x_i, y_i, z_i), \quad j = 1, \ldots, 8,$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i и координат узлов формулы.

Взяв в качестве узлов орбиты точек

$$(0; r+1; 0),\ (x_2; y_2; 0)\,,\ (x_3; 0; z_3),\ (0; y_4; z_4),\ (0; y_5; z_5),$$

с учетом $x_2^2 + y_2^2 = (r+1)^2$ получаем $N = 18$ (нижняя граница числа узлов 14). Ранее в [8] была построена формула с 24 узлами. Приходим к следующей системе

$$\begin{aligned}
&2c_1 + 4c_2 + 4c_3 + 4c_4 + 4c_5 = 1,\\
&2c_1\,(r+1)^2 + 4c_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + 4c_3x_3^2 + 4c_4y_4^2 + 4c_5y_5^2 = r^2 + \frac{3}{2},\\
&-2c_1\,(r+1)^2 + 4c_2\left(x_2^2 - y_2^2\right) + 4c_3x_3^2 - 4c_4y_4^2 - 4c_5y_5^2 = 0,\\
&4c_3z_3^2 + 4c_4z_4^2 + 4c_5z_5^2 = \frac{1}{2},\\
&2c_1(r+1)^4 + 4c_2(x_2^4 + y_2^4) + 4c_3x_3^4 + 4c_4y_4^4 + 4c_5y_5^4 = \frac{3}{4}r^4 + \frac{15}{4}r^2 + \frac{45}{32},\\
&-2c_1(r+1)^4 + 4c_2\left(x_2^4 - y_2^4\right) + 4c_3x_3^4 - 4c_4y_4^4 - 4c_5y_5^4 = 0,\\
&4c_3z_3^2x_3^2 + 4c_4z_4^2y_4^2 + 4c_5z_5^2y_5^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8},\\
&4c_3z_3^2x_3^2 - 4c_4z_4^2y_4^2 - c_5z_5^2y_5^2 = 0,\\
&4c_2x_2^2y_2^2 = \frac{1}{8}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{15}{64}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Складывая второе и третье, пятое и шестое, седьмое и восьмое уравнения и принимая во внимание, что узлы лежат на поверхности тора и, следовательно, $z_i^2 = 1 - (x_i - r)^2$ для $i = 4, 5,$ и $z_6^2 = 1 - (y_6 - r)^2,$ получаем

$$8c_2x_2^2 + 8c_3x_3^2 = r^2 + \frac{3}{2}, \qquad 4c_2x_2^4 + 8c_3x_3^4 = \frac{3}{4}r^4 + \frac{15}{4}r^2 + \frac{45}{32},$$

$$8c_3\left(1 - (x_3 - r)^2\right)x_3^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{3}{8}, \qquad 4c_2x_2^2\left((r+1)^2 - x_2^2\right) = \frac{1}{8}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{15}{64}.$$

Отсюда можно найти $x_2, c_2, x_3, c_3:$

$$\begin{aligned}
x_2 =& \frac{2\sqrt{32r^6 - 24r^4 + 36r^2 - 9}}{128r^6 - 96r^4 + 144r^2 - 36}\\
&\times \sqrt{32r^8 + 448r^7 - 972r^4 - 616r^6 + 816r^5 + 18r + 888r^3 - 207r^2 - 36},\\
c_2 =& \frac{1}{48}\frac{(32r^6 - 24r^4 + 36r^2 - 9)^2}{r(2r-1)(2r^2 - 3r + 2)}\\
&\times \frac{1}{(32r^8 + 448r^7 - 972r^4 - 616r^6 + 816r^5 + 18r + 888r^3 - 207r^2 - 36)},\\
x_3 =& \frac{8r^4 - 12r - 16r^3 + 3 + 24r^2}{8r^3 - 12r^2 + 12r - 3},\\
c_3 =& \frac{1}{192}\frac{(8r^3 - 12r^2 + 12r - 3)^4}{(4r^3 - 8r^2 + 7r - 2)r(8r^4 - 12r - 16r^3 + 3 + 24r^2)^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения x_2, c_2, x_3, c_3 в систему (2.1) и преобразовывая ее, получим систему из пяти уравнений для нахождения c_1, y_4, c_4, y_5, c_5. Так как для произвольного r система выглядит очень громоздко, приведем пример ее решения для $r = 1$:

$$
\begin{aligned}
&2c_1 + 4c_4 + 4c_5 = 19077/41552,\\
&8c_1 + 8c_4y_4 + 8c_5y_5 = 3429/2968,\\
&8c_1 + 4c_4y_4^2 + 4c_5y_5^2 = 745/848,\\
&32c_1 + 8c_4y_4^3 + 8c_5y_5^3 = 1225/424,\\
&32c_1 + 4c_4y_4^4 + 4c_5y_5^4 = 2079/848.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Выразим c_1, c_4, c_5 из первых трех уравнений (2.2) и подставим в два последних. Теперь получим, что левые части последних уравнений есть симметрические многочлены относительно y_4 и y_5. Для того, чтобы решить полученную нелинейную систему двух уравнений, произведем подстановку

$$y_4 + y_5 = a_1, \quad y_4y_5 = a_2.$$

Решая преобразованную систему, получим $a_1 = 392/187$, $a_2 = 147/187$. И так как решением исходной системы являются корни квадратного уравнения $y^2 - a_1y + a_2 = 0$, имеем $y_{4,5} = \left(196 \pm 7\sqrt{223}\right)/187$. Далее находим значения c_1, c_4, c_5:

$$c_1 = \frac{2261}{94128}, \quad c_4 = \frac{35773}{696192} + \frac{117925}{155250816}\sqrt{223}, \quad c_5 = \frac{35773}{696192} - \frac{117925}{155250816}\sqrt{223}.$$

Исследуем решение системы (2.1) в зависимости от произвольного параметра r. Коэффициенты c_2, c_3, c_4, c_5 положительны для любого r, а коэффициент c_1 меняет знак

$$
\begin{aligned}
&c_1 > 0 \quad \text{при} \quad 1 \le r < 1{,}4981;\\
&c_1 = 0 \quad \text{при} \quad r = 1{,}4981;\\
&c_1 < 0 \quad \text{при} \quad r > 1{,}4981.
\end{aligned}
$$

Таким образом, при $r = 1{,}4981$ значение c_1 равно нулю и кубатурная формула содержит 16 узлов. Примеры построенных инвариантных формул пятой степени точности для разных радиусов приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(0; 2; 0)$	2	$\frac{2261}{94128}$
$\left(\frac{\sqrt{265}}{10}; \frac{3\sqrt{15}}{10}; 0\right)$	4	$\frac{175}{2544}$
$\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{\sqrt{21}}{5}\right)$	4	$\frac{625}{9408}$
$\left(0; \frac{196+7\sqrt{223}}{187}; \frac{\sqrt{23961-126\sqrt{223}}}{187}\right)$	4	$\frac{35773}{696192} + \frac{117925\sqrt{223}}{155250816}$
$\left(0; \frac{196-7\sqrt{223}}{187}; \frac{\sqrt{23961+126\sqrt{223}}}{187}\right)$	4	$\frac{35773}{696192} - \frac{117925\sqrt{223}}{155250816}$

Таблица 2

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 2$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(0; 3; 0)$	2	$-0{,}0420$
$(2{,}443; 1{,}7412; 0)$	4	$0{,}0654$
$(2{,}0270; 0; 0{,}9996)$	4	$0{,}0723$
$(0; 2{,}7395; 0{,}6731)$	4	$0{,}0808$
$(0; 1{,}1677; 0{,}5544)$	4	$0{,}0525$

Таблица 3

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 100$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(0; 101; 0)$	2	$-0{,}2154$
$(53{,}3428; 85{,}7644; 0)$	4	$0{,}1494$
$(99{,}5076; 0; 0{,}8704)$	4	$0{,}0833$
$(0; 100{,}5075; 0{,}8616)$	4	$0{,}0833$
$(0; 99{,}0000; 0{,}0112)$	4	$0{,}0416$

3. Построение инвариантной кубатурной формулы 7-й степени точности

В этом случае базисными инвариантными формами относительно G для T будут многочлены:

$$u_1 = 1,\ \ u_2 = x^2 + y^2,\ \ u_3 = x^2 - y^2,\ \ u_4 = z^2,\ \ u_5 = (x^2 + y^2)^2,\ \ u_6 = (x^2 - y^2)^2,\ \ u_7 = x^4 - y^4,$$

$$u_8 = z^2(x^2+y^2),\ \ u_9 = z^2(x^2-y^2),\ \ u_{10} = (x^2-y^2)^3,\ \ u_{11} = (x^2+y^2)^3,\ \ u_{12} = (x^2-y^2)^2(x^2+y^2),$$

$$u_{13} = (x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2),\ \ u_{14} = z^2(x^2 + y^2)^2,\ \ u_{15} = z^2(x^2 - y^2)^2,\ \ u_{16} = z^2(x^4 - y^4).$$

В качестве узлов возьмем орбиты точек

$$(r + 1; 0; 0),\quad (0; r + 1; 0),\quad \Big(\frac{r+1}{\sqrt{2}}; \frac{r+1}{\sqrt{2}}; 0\Big),\quad (x_4; x_4; z_4),\quad (x_5; 0; z_5),$$
$$(x_6; 0; z_6),\quad (0; y_7; z_7),\quad (0; y_8; z_8),\quad (0; y_9; z_9).$$

Получаемое число узлов равно $N = 36$ (нижняя граница числа узлов 26). Ранее в [8] была построена формула с 40 узлами. Приходим к следующей системе

$$\begin{aligned}
&2c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 + 4c_5 + 4c_6 + 4c_7 + 4c_8 + 4c_9 = 1,\\
&2c_1(r + 1)^2 + 2c_2(r + 1)^2 + 4c_3(r + 1)^2 + 16c_4x_4^2 + 4c_5x_5^2 + 4c_6x_6^2 + 4c_7y_7^2 + 4c_8y_8^2 + 4c_9y_9^2\\
&\qquad = r^2 + \frac{3}{2},\\
&2c_1(r + 1)^2 - 2c_2(r + 1)^2 + 4c_5x_5^2 + 4c_6x_6^2 - 4c_7y_7^2 - 4c_8y_8^2 - 4c_9y_9^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$8c_4z_4^2+4c_5z_5^2+4c_6z_6^2+4c_7z_7^2+4c_8z_8^2+4c_9z_9^2=\frac{1}{2},$$

$$2c_1(r+1)^4+2c_2(r+1)^4+4c_3(r+1)^4+32c_4x_4^4+4c_5x_5^4+4c_6x_6^4+4c_7y_7^4+4c_8y_8^4+4c_9y_9^4 = r^4+5r^2+\frac{15}{8},$$

$$2c_1(r+1)^4+2c_2(r+1)^4+4c_5x_5^4+4c_6x_6^4+4c_7y_7^4+4c_8y_8^4+4c_9y_9^4=\frac{1}{2}r^4+\frac{5}{2}r^2+\frac{15}{16},$$

$$2c_1(r+1)^4-2c_2(r+1)^4+4c_5x_5^4+4c_6x_6^4-4c_7y_7^4-4c_8y_8^4-4c_9y_9^4=0,$$

$$16c_4z_4^2x_4^2+4c_5z_5^2x_5^2+4c_6z_6^2x_6^2+4c_7z_7^2y_7^2+4c_8z_8^2y_8^2+4c_9z_9^2y_9^2=\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{8},$$

$$4c_5z_5^2x_5^2+4c_6z_6^2x_6^2-4c_7z_7^2y_7^2-4c_8z_8^2y_8^2-4c_9z_9^2y_9^2=0,$$

$$2c_1(r+1)^6-2c_2(r+1)^6+4c_5x_5^6+4c_6x_6^6-4c_7y_7^6-4c_8y_8^6-4c_9y_9^6=0,$$

$$2c_1(r+1)^6+2c_2(r+1)^6+4c_3(r+1)^6+64c_4x_4^6+4c_5x_5^6+4c_6x_6^6+4c_7y_7^6+4c_8y_8^6+4c_9y_9^6 = r^6+\frac{21}{2}r^4+\frac{105}{8}r^2+\frac{35}{16},$$

$$2c_1(r+1)^6+2c_2(r+1)^6+4c_5x_5^6+4c_6x_6^6+4c_7y_7^6+4c_8y_8^6+4c_9y_9^6 = \frac{1}{2}r^6+\frac{21}{4}r^4+\frac{105}{16}r^2+\frac{35}{32},$$

$$2c_1(r+1)^6-2c_2(r+1)^6+4c_5x_5^6+4c_6x_6^6-4c_7y_7^6-4c_8y_8^6-4c_9y_9^6=0,$$

$$32c_4z_4^2x_4^4+4c_5z_5^2x_5^4+4c_6z_6^2x_6^4+4c_7z_7^2y_7^4+4c_8z_8^2y_8^4+4c_9z_9^2y_9^4=\frac{1}{2}r^4+\frac{5}{4}r^2+\frac{5}{16},$$

$$4c_5z_5^2x_5^4+4c_6z_6^2x_6^4+4c_7z_7^2y_7^4+4c_8z_8^2y_8^4+4c_9z_9^2y_9^4=\frac{1}{4}r^4+\frac{5}{8}r^2+\frac{5}{32},$$

$$4c_5z_5^2x_5^4+4c_6z_6^2x_6^4-4c_7z_7^2y_7^4-4c_8z_8^2y_8^4-4c_9z_9^2y_9^4=0.$$

Орбиты точек специально подобраны так, чтобы 10-е и 13-е уравнения системы совпали. Так как узлы лежат на поверхности тора, то $z_4^2=1-(x_4\sqrt{2}-r)^2$, $z_i^2=1-(x_i-r)^2$ при $i=5,\,6,$ и $z_j^2=1-(y_j-r)^2$ при $j=7,\,8,\,9$.

В итоге рассматриваемая система состоит из 15 уравнений с 15 неизвестными. Разобьем эту систему на две подсистемы из восьми и семи уравнений. Из первой подсистемы, имеющей вид

$$4c_1(r+1)^2+4c_3(r+1)^2+16c_4x_4^2+8c_5x_5^2+8c_6x_6^2=r^2+\frac{3}{2},$$

$$4c_3(r+1)^4+32c_4x_4^4=\frac{1}{2}r^4+\frac{5}{2}r^2+\frac{15}{16},$$

$$16c_4z_4^2x_4^2+8c_5z_5^2x_5^2+8c_6z_6^2x_6^2+=\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{8},$$

$$4c_1(r+1)^6+4c_3(r+1)^6+64c_4x_4^6+8c_5x_5^6+8c_6x_6^6=r^6+\frac{21}{2}r^4+\frac{105}{8}r^2+\frac{35}{16},$$

$$4c_3(r+1)^6+64c_4x_4^6=\frac{1}{2}r^6+\frac{21}{4}r^4+\frac{105}{16}r^2+\frac{35}{32},$$

$$4c_1(r+1)^6+8c_5x_5^6+8c_6x_6^6=\frac{1}{2}r^6+\frac{21}{4}r^4+\frac{105}{16}r^2+\frac{35}{32},$$

$$32c_4z_4^2x_4^4=\frac{1}{4}r^4+\frac{5}{8}r^2+\frac{5}{32},$$

$$8c_5z_5^2x_5^4+8c_6z_6^2x_6^4=\frac{1}{4}r^4+\frac{5}{8}r^2+\frac{5}{32},$$

найдем $c_1, c_3, c_4, x_4, c_5, x_5, c_6, x_6$.

Вторая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned}
&2c_1+2c_2+4c_3+8c_4+4c_5+4c_6+4c_7+4c_8+4c_9=1,\\
&4c_2(r+1)^2+4c_3(r+1)^2+16c_4x_4^2+8c_7y_7^2+8c_8y_8^2+8c_9y_9^2=r^2+\frac{3}{2},\\
&8c_4z_4^2+4c_5z_5^2+4c_6z_6^2+4c_7z_7^2+4c_8z_8^2+4c_9z_9^2=\frac{1}{2},\\
&4c_2(r+1)^4+4c_3(r+1)^4+8c_7y_7^4+8c_8y_8^4+8c_9y_9^4=\frac{1}{2}r^4+\frac{5}{2}r^2+\frac{15}{16},\\
&16c_4z_4^2x_4^2+8c_7z_7^2y_7^2+8c_8z_8^2y_8^2+8c_9z_9^2y_9^2=\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{8},\\
&4c_2(r+1)^6+4c_3(r+1)^6+64c_4x_4^6++4c_7y_7^6+4c_8y_8^6+4c_9y_9^6=r^6+\frac{21}{2}r^4+\frac{105}{8}r^2+\frac{35}{16},\\
&8c_7z_7^2y_7^4+8c_8z_8^2y_8^4+8c_9z_9^2y_9^4=\frac{1}{4}r^4+\frac{5}{8}r^2+\frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем значения $c_2, c_7, y_7, c_8, y_8, c_9, y_9$.

При решении данных подсистем применяем замену переменных, подобную той, которая приведена в предыдущем пункте 2. Примеры построенных инвариантных формул седьмой степени точности для разных радиусов приведены в табл. 4–5.

Таблица 4

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 7-й степени точности при $r=1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2;0;0)$	2	0,02344
$(0;2;0)$	2	−0,00166
$(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;0)$	4	77/2048
$\left(11\sqrt{2}/14;11\sqrt{2}/14;\sqrt{22/49}\right)$	8	117649/3748096
$\left(\frac{2178+11\sqrt{4659}}{1645};0;\frac{\sqrt{1858197-11726\sqrt{4659}}}{1645}\right)$	4	0,02866
$\left(\frac{2178-11\sqrt{4659}}{1645};0;\frac{\sqrt{1858197+11726\sqrt{4659}}}{1645}\right)$	4	0,02927
$(0;0{,}2714;0{,}6849)$	4	0,01614
$(0;1{,}0314;0{,}9995)$	4	0,02756
$(0;1{,}8910;0{,}4538)$	4	0,03708

Таблица 5

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 7-й степени точности при $r=2$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(3;0;0)$	2	0,01428
$(0;3;0)$	2	−0,14690
$(3\sqrt{2}/2;3\sqrt{2}/2;0)$	4	18823/525312
$\left(\frac{251\sqrt{2}}{218};\frac{251\sqrt{2}}{218};\frac{2\sqrt{2698}}{109}\right)$	8	5031300332523/154446630950912
$(2{,}7366;0;0{,}6762)$	4	0,02974
$(1{,}3464;0;0{,}7568)$	4	0,03668
$(0;1{,}0050;0{,}1003)$	4	0,01902
$(0;1{,}7255;0{,}9615)$	4	0,02467
$(0;2{,}9602;0{,}2791)$	4	0,10520

Заключение

В работе построены инвариантные кубатурные формулы пятой и седьмой степени точности для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$. Число узлов в данных формулах меньше, чем в построенных ранее, и приближено к минимальному. Показано, что существование и свойства инвариантных кубатурных формул для тора зависят от r.

References

[1] С. Л. Соболев, В. Л. Васкевич, *Кубатурные формулы*, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996. [S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich, *Cubature Formulas*, IM SB RAN, Novosibirsk, 1996 (In Russian)].

[2] И. П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, М., 1981. [I. P. Mysovskukh, *Interpolational Cubature Formulas*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[3] М. В. Носков, "О приближенном интегрировании по поверхности тора", *Вестник СПбГУ*, **3**:15 (1992), 100–102. [M. V. Noskov, "On approximate integration over the torus surface", *Vestnik St. Petersburg University*, **3**:15 (1992), 100–102 (In Russian)].

[4] M. V. Noskov, H. J. Schmid, "Minimal cubature formulae of degree 3 for integrals over the surface of the torus", *Computing*, **57** (1996), 213–233.

[5] И. М. Федотова, М. В. Носков, "Минимальные кубатурные формулы степени точности 3 для тора в $\mathbb{R}^3$", *Математические труды*, **18**:2 (2015), 49–60; англ. пер.:I. M. Fedotova, M. V. Noskov, "Minimal cubature formulas of degree 3 for a torus in $\mathbb{R}^3$", *Siberian Advances in Mathematics*, **26**:2 (2016), 90–98.

[6] М. В. Носков, И. М. Федотова, "Об одной минимальной кубатурной формуле второй степени точности для тора в $\mathbb{R}^3$", *Математические труды*, **23**:1 (2020), 177–186; англ. пер.:M. V. Noskov, I. M. Fedotova, "On a minimal cubature formula of degree two for a torus in $\mathbb{R}^3$", *Siberian Advances in Mathematics*, **31**:1 (2021), 45–52.

[7] Э. Б. Винберг, *Симметрия многочленов*, Библиотека «Математическое просвещение», МЦНМО, М., 2001. [E. B. Vinberg, *Symmetry of Polynomials*, MCNMO, Moscow, 2001 (In Russian)].

[8] М. В. Носков, И. М. Федотова, "Об инвариантных кубатурных формулах для тора в $\mathbb{R}^3$", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:9 (2003), 1323–1329; англ. пер.:M. V. Noskov, I. M. Fedotova, "On invariant cubature formulas for a torus in $\mathbb{R}^3$", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **43**:9 (2003), 1270–1276.

Информация об авторах

Федотова Ирина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: firim@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8673-6275

Медведева Мария Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: mimedvedeva@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4615-7882

Information about the authors

Irina M. Fedotova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail:firim@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8673-6275

Maria I. Medvedeva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: mimedvedeva@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4615-7882

Кацунова Анастасия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: akatsunova@sfu-kras.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1875-4188

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Медведева Мария Ивановна
E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Anastasiya S. Katsunova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: akatsunova@sfu-kras.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1875-4188

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Maria I. Medvedeva
E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

Received 27.03.2024
Reviewed 03.06.2024
Accepted for press 07.06.2024